

**Jürgen Dankert, Helga Dankert**

# **Technische Mechanik**

## **Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik**

4. korrigierte und ergänzte Auflage

Mit 1070 Abbildungen, 77 Tabellen  
sowie 390 Übungsaufgaben mit Lösungen  
und zahlreichen weiteren Aufgaben im Internet



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Grundlagen der Statik</b>	<b>1</b>
1.1	Die Kraft	1
1.2	Axiome der Statik	3
1.3	Das Schnittprinzip	5
<b>2</b>	<b>Das zentrale ebene Kraftsystem</b>	<b>9</b>
2.1	Äquivalenz	9
2.2	Gleichgewicht	13
<b>3</b>	<b>Das allgemeine ebene Kraftsystem (Äquivalenz)</b>	<b>16</b>
3.1	Graphische Ermittlung der Resultierenden	16
3.2	Parallele Kräfte	17
3.3	Kräftepaar und Moment	18
3.4	Das Moment einer Kraft	21
3.5	Äquivalenz	22
	3.5.1 Versetzungsmoment	22
	3.5.2 Analytische Ermittlung der Resultierenden	23
<b>4</b>	<b>Schwerpunkte</b>	<b>26</b>
4.1	Schwerpunkte von Körpern	27
4.2	Flächenschwerpunkte	28
4.3	Linien­schwerpunkte	32
4.4	Experimentelle Schwerpunktermittlung	34
4.5	Flächenschwerpunkte, Computer-Verfahren	35
	4.5.1 Eine durch einen Polygonzug begrenzte ebene Fläche	35
	4.5.2 Durch zwei Funktionen begrenzte Fläche	37
4.6	Flächen- und Linienlasten	38
4.7	Aufgaben	40
<b>5</b>	<b>Gleichgewicht des ebenen Kraftsystems</b>	<b>41</b>
5.1	Die Gleichgewichtsbedingungen	41
5.2	Lager und Lagerreaktionen in der Ebene	42
5.3	Statisch bestimmte Lagerung	45
5.4	Aufgaben	51
<b>6</b>	<b>Ebene Systeme starrer Körper</b>	<b>52</b>
6.1	Statisch bestimmte Systeme	52
6.2	Stäbe und Seile als Verbindungselemente	59

---

6.3	Lineare Gleichungssysteme	62
6.4	Fachwerke	70
6.4.1	Statisch bestimmte Fachwerke	70
6.4.2	Berechnungsverfahren	72
6.4.3	Komplizierte Fachwerke, Computerrechnung	75
6.5	Aufgaben	79
<b>7</b>	<b>Schnittgrößen</b>	<b>81</b>
7.1	Definitionen	81
7.2	Differenzielle Zusammenhänge	86
7.3	Ergänzende Bemerkungen zu den Schnittgrößen	90
7.4	Aufgaben	94
<b>8</b>	<b>Räumliche Probleme</b>	<b>95</b>
8.1	Zentrales Kraftsystem	95
8.2	Räumliche Fachwerke	103
8.3	Allgemeines Kraftsystem	107
8.3.1	Momente	107
8.3.2	Das Moment einer Kraft	111
8.3.3	Äquivalenz und Gleichgewicht	114
8.4	Schnittgrößen	117
8.5	Aufgaben	119
<b>9</b>	<b>Haftung</b>	<b>121</b>
9.1	Coulombsches Haftungsgesetz	121
9.2	Seilhaftung	125
9.3	Aufgaben	128
<b>10</b>	<b>Elastische Lager</b>	<b>130</b>
10.1	Lineare Federn	130
10.2	Gleichgewicht bei steifen Federn	132
10.3	Gleichgewicht bei weichen Federn	134
10.4	Beurteilung der Gleichgewichtslagen	137
10.5	Aufgaben	142
<b>11</b>	<b>Seilstatik, Kettenlinien, Stützlinien</b>	<b>143</b>
11.1	Das Seil unter Eigengewicht	144
11.2	Das Seil unter konstanter Linienlast	149
<b>12</b>	<b>Grundlagen der Festigkeitslehre</b>	<b>153</b>
12.1	Beanspruchungsarten	153
12.2	Spannungen und Verzerrungen	154
12.3	Der Zugversuch	156
12.4	Hookesches Gesetz, Querkontraktion	158

<b>13</b>	<b>Festigkeitsnachweis</b>	159
13.1	Belastungsarten	159
13.2	Dauerfestigkeit	161
13.3	Gestaltfestigkeit	163
13.4	Zeitfestigkeit	165
	13.4.1 Spannungskollektive	165
	13.4.2 Palmgren-Miner, Gaßner-Kurven	166
<b>14</b>	<b>Zug und Druck</b>	167
14.1	Spannung, Dehnung	167
14.2	Statisch unbestimmte Probleme	170
14.3	Temperatureinfluss, Fehlmaße	172
14.4	Aufgaben	178
<b>15</b>	<b>Der Stab als finites Element</b>	179
15.1	Die Finite-Elemente-Methode	179
15.2	Fluchtende Stabelemente	180
15.3	Ebene Fachwerk-Elemente	186
15.4	Temperaturdehnung, Anfangsdehnung	190
15.5	Nutzung von Finite-Elemente-Programmen	193
15.6	Aufgaben	197
<b>16</b>	<b>Biegung</b>	198
16.1	Biegemoment und Biegespannung	198
16.2	Flächenträgheitsmomente	203
	16.2.1 Definitionen	203
	16.2.2 Einige wichtige Formeln	205
	16.2.3 Der Satz von Steiner	206
	16.2.4 Zusammengesetzte Flächen	207
	16.2.5 Hauptträgheitsmomente, Hauptzentralachsen	210
	16.2.6 Formalisierung der Berechnung	213
	16.2.7 Durch Polygonzüge begrenzte Flächen, Computer-Rechnung	217
16.3	Gültigkeit der Biegespannungsformel, Widerstandsmomente, Beispiele	221
16.4	Aufgaben	229
<b>17</b>	<b>Verformungen durch Biegemomente</b>	232
17.1	Differenzialgleichung der Biegelinie	232
17.2	Integration der Differenzialgleichung	234
17.3	Rand- und Übergangsbedingungen	240
17.4	Einige wichtige Formeln	243
17.5	Statisch unbestimmte Systeme	246
17.6	Superposition	252
17.7	Aufgaben	255

<b>18</b>	<b>Computer-Verfahren für Biegeprobleme</b>	<b>257</b>
18.1	Das Differenzenverfahren	257
18.1.1	Differenzenformeln	258
18.1.2	Biegelinie bei konstanter Biegesteifigkeit	259
18.1.3	Biegelinie bei veränderlicher Biegesteifigkeit	267
18.2	Der Biegeträger als finites Element	271
18.2.1	Element-Steifigkeitsmatrix für Biegeträger	271
18.2.2	Element-Belastungen (Linienlasten)	276
18.2.3	Biegesteife Rahmentragwerke	279
18.3	Aufgaben	285
<b>19</b>	<b>Spezielle Biegeprobleme</b>	<b>288</b>
19.1	Schiefe Biegung	288
19.2	Der elastisch gebettete Träger	293
19.2.1	Lösung der Differenzialgleichung der Biegelinie	294
19.2.2	Numerische Lösung	298
19.2.3	Spezielle Rand- und Übergangsbedingungen	300
19.3	Der gekrümmte Träger	303
19.3.1	Schnittgrößen	303
19.3.2	Spannungen infolge Biegemoment und Normalkraft	307
19.3.3	Verformungen des Kreisbogenträgers	313
19.3.4	Numerische Berechnung der Verformungen	320
19.4	Aufgaben	323
<b>20</b>	<b>Querkraftschub</b>	<b>325</b>
20.1	Ermittlung der Schubspannungen	325
20.2	Dünnwandige offene Profile, Schubmittelpunkt	331
20.3	Schubspannungen in Verbindungsmitteln	335
20.4	Verformungen durch Querkräfte	337
20.5	Aufgaben	342
<b>21</b>	<b>Torsion</b>	<b>343</b>
21.1	Torsion von Kreis- und Kreisringquerschnitten	343
21.2	Saint-Venantsche Torsion beliebiger Querschnitte	348
21.3	Saint-Venantsche Torsion dünnwandiger Querschnitte	352
21.3.1	Dünnwandige geschlossene Querschnitte	352
21.3.2	Dünnwandige offene Querschnitte	359
21.4	Formeln für die Saint-Venantsche Torsion	363
21.5	Numerische Lösungen	365
21.6	Aufgaben	366
<b>22</b>	<b>Zusammengesetzte Beanspruchung</b>	<b>368</b>
22.1	Modelle der Festigkeitsberechnung	368
22.2	Zusammengesetzte Normalspannung	370
22.3	Der einachsige Spannungszustand	371
22.4	Der ebene Spannungszustand	372

22.5	Festigkeitshypothesen	378
	22.5.1 Ebener Spannungszustand	379
	22.5.2 Berechnung von Wellen	381
22.6	Aufgaben	383
<b>23</b>	<b>Knickung</b>	<b>385</b>
23.1	Stabilitätsprobleme der Elastostatik	385
23.2	Stab-Knickung	386
23.3	Differenzialgleichung 4. Ordnung	394
23.4	Numerische Lösung von Knickproblemen	396
23.5	Aufgaben	400
<b>24</b>	<b>Formänderungsenergie</b>	<b>402</b>
24.1	Arbeitssatz	402
24.2	Formänderungsenergie für Grundbeanspruchungen	404
24.3	Satz von Castigliano	407
24.4	Satz von Castigliano (statisch unbestimmte Systeme)	415
24.5	Aufgaben	421
<b>25</b>	<b>Rotationssymmetrische Modelle</b>	<b>423</b>
25.1	Rotationssymmetrische Scheiben	423
25.2	Spezielle Anwendungsbeispiele	428
25.3	Dünnwandige Behälter (Membranspannungen)	432
25.4	Aufgaben	433
<b>26</b>	<b>Kinematik des Punktes</b>	<b>434</b>
26.1	Geradlinige Bewegung des Punktes	434
	26.1.1 Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung	434
	26.1.2 Kinematische Diagramme	438
26.2	Allgemeine Bewegung des Punktes	440
	26.2.1 Allgemeine Bewegung in einer Ebene	440
	26.2.2 Beschleunigungsvektor, Bahn- und Normalbeschleunigung	443
	26.2.3 Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung	447
	26.2.4 Darstellung der Bewegung mit Polarkoordinaten	451
	26.2.5 Allgemeine Bewegung im Raum	454
26.3	Aufgaben	455
<b>27</b>	<b>Kinematik starrer Körper</b>	<b>457</b>
27.1	Die ebene Bewegung des starren Körpers	457
	27.1.1 Translation und Rotation	457
	27.1.2 Der Momentanpol	460
	27.1.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung	463
27.2	Ebene Relativbewegung eines Punktes	468
27.3	Bewegung des starren Körpers im Raum	472
	27.3.1 Rotation	473
	27.3.2 Allgemeine Bewegung	475
	27.3.3 Relativbewegung eines Punktes	475

27.4	Systeme starrer Körper	477
27.5	Aufgaben	484
<b>28</b>	<b>Kinetik des Massenpunktes</b>	<b>486</b>
28.1	Dynamisches Grundgesetz	486
28.2	Kräfte am Massenpunkt	488
	28.2.1 Geschwindigkeitsabhängige Bewegungswiderstände	489
	28.2.2 Massenkraft, das Prinzip von d'Alembert	491
28.3	Numerische Integration von Anfangswertproblemen	496
	28.3.1 Eine Differenzialgleichung 1. Ordnung	496
	28.3.2 Differenzialgleichungssysteme und Differenzialgleichungen höherer Ordnung	499
28.4	Integration des dynamischen Grundgesetzes	503
	28.4.1 Der Impulssatz	503
	28.4.2 Arbeit, Energie, Leistung	503
	28.4.3 Der Energiesatz	506
28.5	Aufgaben	510
<b>29</b>	<b>Kinetik starrer Körper</b>	<b>512</b>
29.1	Reine Translation	512
29.2	Rotation um eine feste Achse	512
29.3	Massenträgheitsmomente	517
	29.3.1 Massenträgheitsmomente einfacher Körper	518
	29.3.2 Der Satz von Steiner	520
	29.3.3 Deviationsmomente, Hauptachsen	522
29.4	Beispiele zur Rotation um eine feste Achse	528
	29.4.1 Allgemeine Beispiele	528
	29.4.2 Auswuchten von Rotoren	534
29.5	Ebene Bewegung starrer Körper	538
	29.5.1 Schwerpunktsatz, Drallsatz	538
	29.5.2 Das Prinzip von d'Alembert	541
	29.5.3 Energiesatz	546
	29.5.4 Beispiele	547
29.6	Räumliche Bewegung starrer Körper	555
	29.6.1 Schwerpunktsatz, Drallsatz	555
	29.6.2 Körperfeste Koordinaten, Eulersche Gleichungen, Kreiselbewegung	558
	29.6.3 Das Kreiselmoment	562
29.7	Aufgaben	565
<b>30</b>	<b>Kinetik des Massenpunktsystems</b>	<b>567</b>
30.1	Schwerpunktsatz, Impulssatz, Drallsatz	567
30.2	Stoß	571
	30.2.1 Der gerade zentrische Stoß	571
	30.2.2 Der schiefe zentrische Stoß	575
	30.2.3 Der exzentrische Stoß	577
30.3	Aufgaben	580

<b>31</b>	<b>Schwingungen</b>	581
31.1	Harmonische Schwingungen	581
31.2	Freie ungedämpfte Schwingungen	583
	31.2.1 Schwingungen mit kleinen Ausschlägen	583
	31.2.2 Elastische Systeme	585
	31.2.3 Nichtlineare Schwingungen	588
31.3	Freie gedämpfte Schwingungen	589
31.4	Erzwungene Schwingungen	592
	31.4.1 Schwingungen mit harmonischer Erregung der Masse	593
	31.4.2 Erregung über Feder und Dämpfer	595
	31.4.3 Unwuchterregung	597
	31.4.4 Biegekritische Drehzahlen	599
31.5	Aufgaben	601
<b>32</b>	<b>Systeme mit mehreren Freiheitsgraden</b>	603
32.1	Freie ungedämpfte Schwingungen	603
32.2	Torsionsschwingungen	606
32.3	Eigenschwingungen linear-elastischer Systeme	609
32.4	Biegekritische Drehzahlen	612
32.5	Zwangsschwingungen, Schwingungstilgung	613
32.6	Aufgaben	616
<b>33</b>	<b>Prinzipien der Mechanik</b>	618
33.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	618
33.2	Prinzip der virtuellen Arbeit für Potenzialkräfte, Stabilität des Gleichgewichts	623
33.3	Prinzip von d'Alembert in der Fassung von Lagrange	628
33.4	Lagrangesche Bewegungsgleichungen	631
	33.4.1 Generalisierte Kräfte, Potenzialkräfte	631
	33.4.2 Virtuelle Arbeit der Massenkräfte	632
	33.4.3 Lagrangesche Gleichungen 2. Art	633
33.5	Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials	637
	33.5.1 Das Verfahren von Ritz	640
	33.5.2 Randwertproblem und Variationsproblem	643
	33.5.3 Verfahren von Ritz und Finite-Elemente-Methode	645
33.6	Aufgaben	651
<b>Anhang A</b>	<b>(Lösungen zu den Aufgaben)</b>	652
<b>Anhang B</b>		674
B1	Ergebnisse verifizieren	674
B2	Spezielle Aufgaben	677
	Aufgabe B2.1	
	Gerader Träger mit Gelenk, mehrfeldrig, statisch unbestimmt	677

	Aufgabe B2.2	
	Statisch bestimmtes System, schwierig zu entkoppelnde Gleichungen	679
	Aufgabe B2.3	
	3D-Fachwerk, statisch unbestimmt	682
	Aufgabe B2.4	
	Ebener biege- und dehnsteifer Rahmen, hochgradig statisch unbestimmt	684
	Aufgabe B2.5	
	Dreidimensionaler Rahmen mit biege-, dehn- und torsionssteifen Elementen, hochgradig statisch unbestimmt	686
	Aufgabe B2.6	
	Nichtlineares Anfangswertproblem, ein Freiheitsgrad, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung	688
	Aufgabe B2.7	
	Lineares Anfangswertproblem, zwei Freiheitsgrade, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung	691
	Aufgabe B2.8	
	Doppelpendel, zwei Freiheitsgrade, nichtlineares Anfangswertproblem, Differenzialgleichungen sind in den Beschleunigungsgliedern gekoppelt	693
	Aufgabe B2.9	
	Laufkatze, zwei Freiheitsgrade, nichtlineares Anfangswertproblem, Differenzialgleichungen sind in den Beschleunigungsgliedern gekoppelt, zeitabhängiges und wegabhängiges Ereignis	697
B3	Finite-Elemente-Methode als Näherungsverfahren	699
	B3.1 Ein- bzw. zweidimensionale FEM-Modelle	700
	B3.2 Reduktion der Elementlasten, Realisierung der Lagerung	703
	B3.3 Kompatibilität und Gleichgewicht	704
	B3.4 Die Element-Steifigkeitsmatrix	704
	Aufgabe B3.1	
	Scheibentheorie, Finite-Elemente-Methode, unterschiedliche Elementtypen, Einfluss der Vernetzung auf die Ergebnisse	708
	Aufgabe B3.2	
	Biegetheorie, veränderlicher Querschnitt, Einfluss der Vernetzung auf die Ergebnisse	711
	Aufgabe B3.3	
	Saint-Venantsche Torsion, Torsions-Trägheitsmoment des Rechteckquerschnitts, Einfluss der Vernetzung auf die Ergebnisse	713
	<b>Literatur</b>	714
	<b>Index</b>	715